

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Стерлитамакский филиал  
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования  
«Башкирский государственный университет»

### **ПРОГРАММА**

вступительных испытаний, проводимых вузом самостоятельно,  
**по специальности**  
для поступающих в аспирантуру по направлению подготовки  
01.06.01 Математика и механика,  
направленность «Дифференциальные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление»

Стерлитамак 2018 г

## **1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Направление подготовки в аспирантуре 01.06.01 Математика и механика подразумевает изучение раздела математики, посвященного дифференциальным уравнениям. Основными составными частями специальности являются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Главные научные цели специальности: исследование разрешимости дифференциальных уравнений, описание качественных и количественных характеристик решений, приложения.

Проведение экзамена позволяет выявить уровень подготовленности абитуриентов к научно-исследовательской и опытно-экспериментальной деятельности, проверить глубину знаний по данной области науки, выявить способность к самостоятельному ознакомлению с большим объемом информации в сжатые сроки и его усвоением.

В ходе вступительного экзамена по специальности соискатель должен быть готов продемонстрировать владение следующими компетенциями в соответствии с ФГОС ВО уровень высшего образования магистратура; направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность: Математика, Информатика:

способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу, способностью совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень (ОК-1);

способностью к самостоятельному освоению и использованию новых методов исследования, к освоению новых сфер профессиональной деятельности (ОК-3);

способностью самостоятельно приобретать и использовать, в том числе с помощью информационных технологий, новые знания и умения, непосредственно не связанные со сферой профессиональной деятельности (ОК-5).

готовностью использовать знание современных проблем науки и образования при решении профессиональных задач (ОПК-2);

способностью осуществлять профессиональное и личностное самообразование, проектировать дальнейшие образовательные маршруты и профессиональную карьеру (ОПК-4);

способностью анализировать результаты научных исследований, применять их при решении конкретных научно-исследовательских задач в сфере науки и образования, самостоятельно осуществлять научное исследование (ПК-5);

уровень высшего образования магистратура; направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика, направленность: Математические методы моделирования и компьютерные технологии:

способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК-1); способностью использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики (ОПК-4);

способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива (ПК-1);

способностью разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач (ПК-2);

способностью разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-3).

## **2. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА**

### **1. Математический анализ**

Множество действительных чисел, свойства. Предел последовательности. Сходимость и расходимость последовательностей. Понятие функции. Понятие предела функции. Основные теоремы о пределах. Непрерывность функции. Локальные и глобальные свойства непрерывности функции. Монотонность функции. Обратная функция.

Дифференцируемость, производная и дифференциал функции одной переменной. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Касательная и нормаль к кривой. Основные теоремы дифференциального исчисления. Определенный интеграл, основные свойства. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Числовые ряды. Знакопередающиеся ряды. Сходимость числовых рядов. Функциональные ряды. Сходимость. Степенные ряды. Сходимость. Радиус сходимости. Ряд Тейлора. Условия разложимости функций в ряд Тейлора. Ряды Фурье. Лемма Римана. Интегральное представление частичной суммы ряда Фурье. Интеграл Фурье. Основная теорема. Преобразования Фурье.

Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных. Кратные интегралы. Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы. Скалярные поля. Производная по направлению. Градиент. Дивергенция. Ротор.

## **2. Теория функций действительной переменной и функциональный анализ.**

Понятие мощности множества. Замкнутые и открытые множества, свойства. Мера множества Лебега. Свойства измеримых функций. Интеграл Лебега. Свойства. Класс суммируемых функций. Свойства. Полные метрические пространства. Принцип сжатых отображений и его применение в теории интегральных и дифференциальных уравнений. Линейные и нормированные пространства. Их свойства. Примеры. Абстрактное гильбертово пространство. Примеры. Линейные функционалы. Компактные множества в метрических пространствах. Определения. Общие теоремы.

## **3. Теория функций комплексной переменной.**

Дифференцируемость комплексной функции комплексной переменной. Условие дифференцируемости. Дифференцируемость степенных рядов. Аналитические функции. Гармонические функции. Интеграл функции комплексной переменной. Аналитическое продолжение. Теорема единственности для аналитических функций. Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Вычеты. Вычисление вычетов. Основная теорема вычетов. Применение теории вычетов к вычислению интегралов.

## **4. Алгебра**

Определители и их свойства. Вычисление определителей. Метод Крамера при решении системы линейных уравнений. Матрицы и действия над ними. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матриц. Ранг матрицы. Определение ранга при помощи элементарных преобразований. Обратная матрица. Система линейных уравнений общего вида. Теорема Кронекера — Капелли. Метод Гаусса. Квадратичные формы. Линейные операторы в конечномерных пространствах и их матрицы. Собственные значения и собственные векторы.

## **5. Геометрия**

Уравнение прямой и плоскости в пространстве. Различные способы задания Линии и поверхности 2-го порядка. Приведение к каноническому виду. Понятие линии. Параметризация линии. Натуральный параметр. Кривизна. Кручение. Формула Френе. Эволюта и эвольвента плоской кривой. Понятие поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности. Первая квадратичная форма. Внутренняя геометрия поверхностей.

## **6. Дифференциальные уравнения**

Основные понятия теории дифференциальных уравнений; основные задачи теории дифференциальных уравнений (краевые задачи). Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения 1-го порядка и нормальной системы. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Фундаментальная система частных решений. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение. Построение общего решения. Неоднородные

линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Структура общего решения. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

### **7. Некоторые специальные функции**

Интегралы, зависящие от параметра. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Основные свойства. Гамма и бета функции. Их свойства. Функции Бесселя и их свойства. Гипергеометрическая функция Гаусса и ее основные свойства.

### **8. Интегральные уравнения**

Понятие интегрального уравнения. Классификация интегральных уравнений. Уравнение Вольтера. Уравнение Абеля. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Интегральные уравнения с невырожденными ядрами. Интегральные уравнения со слабой особенностью. Интегральные уравнения с вполне непрерывными операторами. Теория Рисса - Шауцера. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теория Гильберта - Шмидта. Понятие о сингулярном интегральном уравнении.

### **9. Уравнения математической физики**

Основные понятия и определения курса дифференциальных уравнений в частных производных. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка задачи Коши и смешанной задачи. Постановка задач Гурса и Дарбу. Решение смешанной задачи для уравнения струны методом рядов Фурье. Уравнение Лапласа. Принцип экстремума для гармонических функций. Уравнение теплопроводности. Принцип экстремума. О корректности постановки краевой задачи для уравнений математической физики. Примеры некорректных краевых задач.

## **3. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ЭКЗАМЕНУ**

### **I. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

1. Множество действительных чисел. Основные его свойства. Различные подходы построения множества действительных чисел.
2. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Предел монотонной последовательности. Принцип стягивающихся сегментов. Лемма Больцано - Вейерштрасса. Критерий Коши о сходимости произвольной последовательности.
3. Понятие функции. Предел функции по Коши и Гейне. Эквивалентность этих определений. Основные теоремы о пределах функций.
4. Непрерывность функций. Локальные свойства непрерывных функций. Глобальные свойства непрерывных функций (теоремы Больцано - Коши, Вейерштрасса и Кантора).
5. Свойства монотонной функции. Обратная функция. Существование и непрерывность обратной функции. Существование арифметического корня и логарифмов. Непрерывность основных элементарных функций.
6. Дифференцируемость, производная и дифференциал функции одной переменной. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Касательная и нормаль к кривой.
7. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Теоремы Лопиталю. Формула Тейлора).
8. Определенный интеграл Римана. Критерий и достаточные признаки интегрируемости. Теоремы о среднем. Оценки интеграла.
9. Определенный интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.

Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона - Лейбница. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

10. Числовые ряды. Необходимое условие и критерий Коши сходимости. Признаки сравнения Даламбера, Коши и интегральный. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка ряда.

11. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема Дирихле и Римана. Умножение рядов.

12. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Условия равномерной сходимости. Функциональные свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

13. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости. Формула Коши - Адамара. Функциональные свойства суммы степенного ряда.

14. Ряд Тейлора. Условия разложимости функций в ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. Приближенное вычисление значений функций и интегралов с помощью степенных рядов.

15. Ряды Фурье. Лемма Римана. Интегральное представление частичной суммы ряда Фурье. Интеграл и ядро Дирихле. Сходимость ряда Фурье в точке. Теоремы Фейера и Вейерштрасса.

16. Пространство кусочно-непрерывных функций. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Неравенство Бесселя. Сходимость в среднем. Равенство Парсевала. Полнота тригонометрической системы. Достаточные условия равномерной и абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

17. Интеграл Фурье. Основная теорема. Преобразования Фурье. Свойства преобразования Фурье. Преобразования Фурье производных. Свертка функций. Преобразование Фурье свертки. Синус и косинус преобразования Фурье. Применение преобразования Фурье.

18. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Условия дифференцируемости. Дифференцирование сложной функции. Теорема о равенстве смешанных производных.

19. неявные функции, определяемые одним уравнением. неявные функции, определяемые системой уравнений.

20. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия локального экстремума. Достаточное условие. Глобальный экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа.

21. Кратные интегралы. Сведение двойного интеграла к повторному интегралу. Замена переменных в кратном интеграле. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

22. Криволинейные интегралы. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Интегрирование полных дифференциалов.

23. Поверхностные интегралы. Формула Остроградского - Гаусса. Формула Стокса.

24. Скалярные поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Оператор Набла (Гамильтона) и его свойства. Векторные поля. Поток векторного поля. Дивергенция векторного поля и его свойства. Циркуляция и ротор векторного поля. Физический смысл ротора векторного поля.

## **II. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

25. Понятие мощности множества. Признаки равномощности. Сравнение мощностей. Существование различных мощностей. Счетные множества и их свойства.

Множества мощности континуума.

26. Замкнутые и открытые множества. Их свойства. Строение открытых, замкнутых и совершенных множеств.

27. Мера множества Лебега. Свойства измеримых множеств. Измеримые функции. Последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Связь с другими видами сходимости. Теоремы Рисса и Егорова.

28. Интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

29. Класс суммируемых функций и его свойства. Функции, суммируемые с квадратом. Сходимость в среднем.

30. Полные метрические пространства. Принцип сжатых отображений и его применение в теории интегральных и дифференциальных уравнений.

31. Линейные и нормированные пространства. Их свойства. Примеры.

32. Абстрактное гильбертово пространство. Примеры. Изоморфизм гильбертовых сепарабельных пространств. Теорема о проекциях.

33. Линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах.

34. Компактные множества в метрических пространствах. Определения. Общие теоремы. Критерий компактности множества в  $C[a, b]$  (Теорема Арцела).

### **III. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

35. Дифференцируемость комплексной функции комплексной переменной. Условие дифференцируемости. Дифференцируемость степенных рядов. Аналитические функции. Гармонические функции.

36. Интеграл функции комплексной переменной. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Разложение в ряд Тейлора. Теорема Лиувилля. Принцип максимума модуля аналитической функции. Лемма Шварца.

37. Аналитическое продолжение. Теорема единственности для аналитических функций. Задача аналитического продолжения. Принцип продолжения по непрерывности. Элементарные функции комплексной переменной как аналитическое продолжение с действительной оси.

38. Ряд Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Поведение аналитических функций в окрестности особых точек.

39. Вычеты. Вычисление вычетов. Основная теорема вычетов. Применение теории вычетов к вычислению интегралов.

### **IV. АЛГЕБРА**

40. Определители и их свойства. Вычисление определителей. Метод Крамера при решении системы линейных уравнений.

41. Матрицы и действия над ними. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матриц. Ранг матрицы. Определение ранга при помощи элементарных преобразований. Обратная матрица.

42. Система линейных уравнений общего вида. Теорема Кронекера — Капелли. Метод Гаусса.

43. Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм путем линейных преобразований к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Закон инерции.

44. Линейные операторы в конечномерных пространствах и их матрицы. Собственные значения и собственные векторы.

### **V. ГЕОМЕТРИЯ**

45. Уравнение прямой и плоскости в пространстве. Различные способы задания. Основные задачи прямых и плоскостей.

46. Линии и поверхности 2-го порядка. Приведение к каноническому виду.  
47. Понятие линии. Параметризация линии. Натуральный параметр. Кривизна. Кручение. Формула Френе. Эволюта и эвольвента плоской кривой.  
48. Понятие поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности.

49. Длина дуги кривой на поверхности. Первая квадратичная форма. Внутренняя геометрия поверхностей.

#### **VI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

50. Основные понятия теории дифференциальных уравнений: система обыкновенных; дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка; понятие решения системы дифференциальных уравнений; приведение системы произвольного порядка к системе первого порядка; нормальная система дифференциальных уравнений; линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка; основные задачи теории дифференциальных уравнений (краевые задачи).

51. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения 1-го порядка и нормальной системы. Случаи линейной системы и линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка .

52. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка. Фундаментальная система частных решений. Существование фундаментальной системы частных решений однородного линейного дифференциального уравнения. Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения.

53. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения.

54. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.

55. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.

56. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

#### **VII. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ**

57. Интегралы, зависящие от параметра. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Свойства: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Основные свойства. Применение при вычислении интегралов.

58. Гамма и бета функции. Их свойства.

59. Функции Бесселя и их свойства.

60. Гипергеометрическая функция Гаусса и ее основные свойства.

#### **VIII. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

61. Понятие интегрального уравнения. Классификация интегральных уравнений. Аналог с теорией линейных алгебраических уравнений. Теорема Фредгольма.

62. Уравнение Вольтера. Уравнение Абеля.

63. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Интегральные уравнения с невырожденными ядрами.

64. Интегральные уравнения со слабой особенностью.

65. Интегральные уравнения с вполне непрерывными операторами. Теория Рисса - Шауцера.

66. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теория Гильберта - Шмидта.

67. Понятие о сингулярном интегральном уравнении.

#### **IX. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

68. Основные понятия и определения курса дифференциальных уравнений в

частных производных. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка. Характеристики. Приведение к каноническому виду. Основные уравнения математической физики.

69. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка задачи Коши и смешанной задачи. Решение задачи Коши методом Даламбера. Постановка задач Гурса и Дарбу.

70. Решение смешанной задачи для уравнения струны методом рядов Фурье.

71. Уравнение Лапласа. Принцип экстремума для гармонических функций. Решение задачи Дирихле для круга. Формула Пуассона.

72. Уравнение теплопроводности. Принцип экстремума. Решение задачи Коши методом преобразований Фурье.

73. О корректности постановки краевой задачи для уравнений математической физики. Примеры некорректных краевых задач.

### Задачи вступительного экзамена

1. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; +\infty)$  и существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Доказать, что  $f(x)$  ограничена на  $[a; +\infty)$ .

2. Пусть  $f(x)$  - нечетная дифференцируемая на  $(+\infty; -\infty)$  функция. Доказать, что  $f'(x)$  - четная функция. Верно ли обратное утверждение?

3. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y = xy' + x^2 y''$ ,  $y = y(x)$ .

4. Найти все решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'' + \frac{(y')^2}{y} = x' + \frac{xy'}{y}; \\ x'y + xy' = 1, x = x(t), y = y(t). \end{cases}$$

5. Пусть  $y(x) \in C[0; 1] \cap C^2(0; 1)$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ,  $y'' = e^x y$ . Доказать, что  $y(x) = 0$ .

6. Показать, что функция  $P(x) = 12x^3 + 12ax^2 - 8ax - 3$  имеет хотя бы один нуль в  $(0; 1)$  при любом  $a \in R$ .

7. Решить уравнение  $y(x) = \int_0^x y(t) dt + x + 1$ .

8. Вычислить производную функции  $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$ , если  $f(t)$  непрерывна, а  $\varphi(x)$  дифференцируема на  $[a; b]$ .

9. Проверить, что функция  $y(x) = 1 - x$  является решением интегрального уравнения  $\int_0^x e^{x-1} y(t) dt = x$ .

10. Решить уравнение  $\varphi(x) - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \varphi(t) dt = 2x - 4$ .

11. Методом характеристик найти общее уравнение струны  $u_{xx} - u_{yy} = 0$ ,  $u(x, t) = u$ .

12. В какой области и к какому типу принадлежит уравнение Трикоми  $u u_{xx} +$



$$u_{yy} = 0, u = u(x, y)?$$

13. Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области  $D$  и непрерывна в замкнутой области  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ . Доказать, что  $f(z) = \text{const}$  в  $D$ , если  $\text{Im } f(z)|_{\Gamma} = 0$ .

14. При каком значении  $a$  функция  $f(x) = (|x| - a)^3 - 3|x|$  дифференцируема в точке  $x = 0$ ?

15. Пусть  $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$ . Доказать, что существует число

$c \in (0; 1)$  такое, что  $f'(c) = 0$ .

16. Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ .

17. Найти функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую условиям  $\begin{cases} f'(x) = f'(x-1); \\ f(x) + f(x-1) = x. \end{cases}$

18. Решить дифференциальное уравнение  $y' = \frac{1}{2x-y^2}$ .

19. Написать вид частного решения дифференциального уравнения  $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x} \cos 2x$ .

20. Доказать, что все решения уравнения  $y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}$  ограничены на всей числовой оси.

21. Доказать, что краевая задача  $y'' - x^2 y = 0$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $y(-1) = y(1) = 0$  имеет только нулевое решение.

22. Найти функцию  $f(x)$ , если она определена на  $R$ , не тождественно равна нулю и удовлетворяет уравнению  $f(x)f(y) = f(x-y)$  при всех  $x, y \in R$ .

23. Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \right)$ .

24. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{tg}(\text{tg} x) - \sin(\sin x)}{\text{tg} x - \sin x}$ .

25. Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \right)$ .

26. Определить тип уравнения и привести к каноническому виду:

a)  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$ ;

b)  $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y = 0$ ;

c)  $u_{xx} - yu_{yy} - \frac{1}{2}u_y = 0$ .

27. Определите тип уравнения:

a)  $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u + xy^2 = 0$ ;

b)  $2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$ ;

- c)  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0$ ;  
 d)  $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x - 3u + e^{xyz} = 0$ .

28. Найти общее решение уравнения:

- a)  $2u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$ ;  
 b)  $u_{xy} + au_x = 0, a = \text{const} \neq 0$ ;  
 c)  $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0$ ;  
 d)  $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$ .

29. Решить следующие краевые задачи для уравнения струны  $u_{xx} - u_{yy} = 0$ :

a) задачу Коши с данными

$$u(x, 0) = \tau(x),$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x),$$

$$-\infty < x < +\infty;$$

b) задачу Дарбу с данными

$$u(x, 0) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(x, -x) = \psi(x), 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\tau(0) = \psi(0);$$

c) задачу Гурса с данными

$$u(x, x) = \psi_1(x), 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$u(x, -x) = \psi_2(x), 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0).$$

30. Решить интегральные уравнения:

a)  $\varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\varphi(t)dt$ ;

b)  $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (x - 1)\varphi(t)dt$ ;

c)  $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x - t)\varphi(t)dt, f(x) \in C[0; 2\pi]$ ;

d)  $\varphi(x) = \sin x + \int_0^\pi \cos t \varphi(t)dt$ ;

e)  $\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \varphi(t)dt, a \leq x \leq b$ , где  $f(x)$  - заданная непрерывная на  $[a; b]$

функция.

31. Решить дифференциальные уравнения:

a)  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ ;

b)  $y'' + y = 2\text{tg}x$ ;

- c)  $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ ;  
 d)  $y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$ ;  
 e)  $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$ ;  
 f)  $y'' - xy' - y = 0$ .

32. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p},$$

где  $D = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $p$  – вещественный параметр.

33. Пусть  $f(x) \in C[0; +\infty)$ ,  $f(x) \geq 0$  на  $[0; +\infty)$  и  $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ . Тогда следует ли отсюда что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ?

34. Доказать, что если функция  $f: R \rightarrow R$  удовлетворяет для всех  $x, y \in R$  неравенствам  $f(x) \geq x$ ,  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ , то  $f(x) \equiv x$ .

35. Существует ли не равная константе функция  $f: R \rightarrow R$ , удовлетворяющая для всех  $x, y \in R$  неравенству  $(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3$ ?

36. Пусть непрерывная функция  $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  дифференцируема на интервале  $(0; 1)$ , причем  $f(0) = 0$  и  $f(1) = 1$ . Доказать, что  $\exists a, b \in (0; 1)$  такие, что  $a \neq b$  и  $f'(a)f'(b) = 1$ .

37. Найти все функции  $f: R \rightarrow R$ , удовлетворяющие тождеству  $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$  при  $x, y \in R$ .

38. Доказать, что уравнение  $y' = y^2 + x$  с начальным условием  $y(0) = 0$  не имеет решений на интервале  $(0; 4)$ .

#### 4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Учебная, учебно-методическая литература и другой библиотечно-информационный ресурс Стерлитамакского филиала БашГУ обеспечивают подготовку к вступительному экзамену. Научно-образовательная лаборатория методических исследований при кафедре математического анализа располагает библиотекой, включающей теоретическую и научно-методическую литературу по

##### 4.1 ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

№ п/п	Наименование учебной литературы	Место издания, издательство год	Кол-во экз-ров в библиотеке СФ БашГУ
1	2	3	4

1.	Гурьянова, К.Н. Математический анализ : учебное пособие / К.Н. Гурьянова, У.А. Алексеева, В.В. Бояршинов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. - Екатеринбург	Издательство Уральского университета, 2014. - 332 с. - ISBN 978-5-7996-1340-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=275708">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=275708</a> (06.09.2016).	1
2.	Долгополова, А.Ф. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие / А.Ф. Долгополова, Т.А. Колодяжная.	Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2012. - Ч. 1. - 168 с.; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=233078">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=233078</a> (06.09.2016).	1
3.	Протасов, Ю.М. Математический анализ: учебное пособие / Ю.М. Протасов.	М. : Флинта, 2012. - 165 с. - ISBN 978-5-9765-1234-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115118">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115118</a> (06.09.2016).	1
4.	Матросов, В.Л. Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными: учебник / В.Л. Матросов, Р.М. Асланов, М.В. Топунов.	М.: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС, 2011. - 376 с. - ISBN 978-5-691-01655-4; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=116579">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=116579</a> (06.09.2016).	1
5.	Туганбаев, А.А. Дифференциальные уравнения. 3-е издание: учебное пособие / А.А. Туганбаев.	3-е изд., доп. - М.: Флинта, 2012. - 34 с. - ISBN 978-5-9765-1408-9; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115139">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115139</a> (06.09.2016).	2
6.	Прокудин, Д.А. Уравнения математической физики : учебное пособие / Д.А. Прокудин, Т.В. Глухарева, И.В. Казаченко	Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2014. - 163 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-8353-1631-1; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=278923">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=278923</a> (06.09.2016)	1
7.	Дзержинский, Р.И. Уравнения математической физики: курс лекций / Р.И. Дзержинский, В.А. Логинов	М.: Альтаир: МГАВТ, 2015. - 67 с.: ил. - Библиогр. в кн.; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=429675">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=429675</a> (06.09.2016).	1

8.	Асташова, И.В. Функциональный анализ: учебно-методический комплекс / И.В. Асташова, В.А. Никишкин	3-е изд., испр. и доп. - М. : Евразийский открытый институт, 2011. - ПО с. - ISBN 978-5-374- 00486-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=90883">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=90883</a> (06.09.2016).	1
9.	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики.	М.: Физматлит, 2013. - 352с.	2 экз.
10.	Сабитова Ю.К. Уравнения математической физики	Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ. 2014. - 91с.	15 экз.
11.	Кожевникова Л.М. Элементы функционального анализа.	Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ. 2015. - 132с.	15 экз

#### **4.2 ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

№ п/п	Наименование учебной литературы	Место издания, издательство, год	Кол-во экз-ров в библиотеке СФ БашГУ
1	2	3	4
1	Туганбаев, А.А. Функции комплексного переменного: учебное пособие / А. А. Туганбаев	М.: Флинта, 2012. - 47 с. - ISBN 978-5-9765-1406-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115140">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115140</a> (06.09.2016).	1
2	Крепкогорский, В. Л. Функциональный анализ : учебное пособие / В.Л. Крепкогорский	Казань: Издательство КНИТУ, 2014. - 116 с. : табл., граф., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5- 7882-1650-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=428727">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=428727</a> (06.09.2016).	1
3	Ефремов, Ю.С. Методы математической физики в пакете символьной математики Maple: учебное пособие / Ю.С. Ефремов, М.Д. Петропавловский.	М.; Берлин: Директ-Медиа, 2015. - 299 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-4619-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=428680">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=428680</a> (06.09.2016).	1
4	Кудряшов, С.Н. Основные методы решения практических задач в курсе «Уравнения математической физики»: учебное пособие / С.Н. Кудряшов, Т.Н. Радченко	Ростов-н/Д: Издательство Южного федерального университета, 2011. - 308 с. - ISBN 978-5-9275- 0879-2; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=241103">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=241103</a> (06.09.2016).	1
5	Данилин, А.Р. Функциональный анализ: учебное пособие / А.Р. Данилин.	Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2012. - 200 с. - ISBN 978-5-7996- 0720-3; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=239528">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=239528</a> (06.09.2016).	1

6	Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.	М.: Физматлит, 2012. - 573 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-9221- 0266-7; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;iid=82563">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;iid=82563</a> (06.09.2016).	1
7	Т.И. Бухарова, В.Л. Камынин, А.Б. Костин, Д.С. Ткаченко. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям	М.: МИФИ, 2011. - 228 с. - ISBN 978-5-7262-1400- 9; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;iid=231525">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;iid=231525</a> (06.09.2016).	1
8.	Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения	М.: Высш. школа. 2005. - 671 с.	300экз.

#### 4.3.1. Программное обеспечение

Наименование программного обеспечения	Реквизиты подтверждающего документа	Факультет, ФИО, телефон контактного лица
Информационная система «Абитуриент»	№ свидетельства 2014610503 10.01.2014, приказ о постановке на НМА	СФ БашГУ, Алешин П.Н., 89174202989 p.n.aleshin@gmail.ru

#### 4.3.2. Интернет-ресурс

№ п/п	Наименование учебной литературы	Место издания, издательство, год	Кол-во экз-ров в библиотеке СФ БашГУ
1	2	3	4
1	Высшая аттестационная комиссия Российской Федерации	<a href="http://www.vak.edu.ru/">http://www.vak.edu.ru/</a>	Открытый доступ в электронном читальном зале СФ БашГУ
2	Российское образование. Федеральный портал	<a href="http://www.edu.ru">http://www.edu.ru</a>	Открытый доступ в электронном читальном зале СФ БашГУ
3	Российский образовательный портал. Каталог справочно-информационных источников	<a href="http://www.school.edu.ru/catalog.asp?cat_ob_no=1165">http://www.school.edu.ru/catalog.asp?cat_ob_no=1165</a>	Открытый доступ в электронном читальном зале СФ БашГУ
4	Интернет-ресурсы по обучающим программам Дистанционное обучение – проект «Открытый колледж»	<a href="http://www.college.ru/indexGraph.php3">http://www.college.ru/indexGraph.php3</a>	Открытый доступ в электронном читальном зале СФ БашГУ

5	Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки.	<a href="http://www.fipi.ru/">http://www.fipi.ru/</a>	Открытый доступ в электронном читальном зале СФ БашГУ
---	--	---	---

## 5. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

0-39 баллов - неудовл. (не усвоено основное содержание учебного материала, изложено фрагментарно, не последовательно; определения понятий не четкие; допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии, в определении понятий);

40-59 баллов - удовл. (усвоено основное содержание учебного материала, изложено фрагментарно не всегда последовательно; определения понятий недостаточно четкие; допущены существенные ошибки и неточности в использовании научной терминологии);

60-79 баллов - хорошо (раскрыто основное содержание материала; в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины; ответ самостоятельный, при определении понятий допущены неточности, нарушена последовательность изложения; небольшие недостатки при использовании научной терминологии; небольшие неточности в выводах);

80-100 баллов - отлично (полно раскрыто содержание материала в объеме программы; четко и правильно даны определения, раскрыто содержание понятий; верно использованы научные термины; ответ самостоятельный, использованы ранее приобретенные знания; четко прослеживается межпредметная связь с историей и философией науки, специальными дисциплинами и др; при ответе раскрыты причинно-следственные связи, закономерности).